Proceedings of IAM, V.13, N.1, 2024, pp. 108-118
DOI: 10.30546/2225-0530.13.1.2024.018.

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНО-КВАДРАТИЧНОЙ ОПТИМИЗАЦИИ С ОГРАНИЧЕНИЕМ В ВИДЕ РАВЕНСТВ НА УПРАВЛЕНИЕ МЕТОДОМ ПРОГОНКИ*

Н.С. Гаджиева

Институт Прикладной Математики Бакинского Государственного Университета,
Баку, Азербайджан
e-mail: nazile.m@mail.ru

Резюме. В статье рассматривается дискретная задача линейно-квадратичной оптимизации с граничными условиями. Построив квадратичный функционал и расширенный функционал, получаем дискретные уравнения Эйлера-Лагранжа с граничными условиями. Методом прогонки решена заданная задача линейной дискретно-квадратичной оптимизации и построены оптимальные программные траектории и управляющие воздействия в каждой части интервала времени. Результаты проиллюстрированы на примере вертикального движения летательного аппарата.

Ключевые слова: линейная дискретно-квадратичная задача оптимизации, дискретное уравнение Эйлера-Лагранжа, метод прогонки, конечно-разностные уравнения, управляющее воздействие, оптимальная программная траектория, летающий объект.
AMS Subject Classification: 49M25, 49N20.

1. Введение.

В последнее время важную роль играет определение оптимальных программных траекторий и управляющих воздействий при движении летательного аппарата [5,6,8,10,15,16,20]. Но при вертикальном движении летательного аппарата [18] большой интерес представляет вопрос, на какой высоте летательный аппарат должен остановиться и простоять определенное время. Поэтому, для обычной линейно-квадратичной задачи (ЛКП) [4,7,11,13,14,22] управление должно иметь ограничения в виде равенств на части управляющих воздействий.

В данной работе развит метод прогонки для построения программных траекторий и управляющих воздействий для дискретной линейно-квадратичной задачи оптимизации [1,12]. Отметим, что такой алгоритм помогает найти недостающие начальные условия и свести его к решению конечно-разностных уравнений. Результаты проиллюстрированы на примере

* Работа была представлена на семинаре Института Прикладной Математики БГУ 04.06.2024

вертикального движения летательного аппарата и с определенной точностью совпадают с известными результатами.

2. Постановка задачи.

Пусть движение объекта описывается следующими конечно-разностными уравнениями [9,12,17,23]

$$x_{i+1} = \Phi x_i + \Gamma u_i + \overline{V}, \; 0 \le i \le N-1, \; N+1 \le i \le N+\Delta-1, \qquad (1)$$

с начальным условием

$$Hx_0 = q, \qquad (2)$$

Предположим, что в момент N существует условие

$$x_{N+1} = F_\delta x_N + G_1 u_N, \qquad (3)$$

где $x'(i) = \lfloor z_i^{(1)} \quad z_i^{(2)} \quad z_i^{(3)} \quad z_i^{(4)} \rfloor -$ фазовые координаты n-мерного объекта, $z_i^{(j)}$ - k_j -мерные векторы $(j = \overline{1,4}, \; \sum_{j=1}^{4} k_j = n)$, Знак $'$ означает операцию транспонирования, $\Phi, \; \Gamma, \; H$ постоянные матрицы размером $n \times n, \; n \times m, \; m \times n,$ соответственно, $\overline{V}$ внешнее возмущение размерностью $n \times 1, \; u'_i = \lfloor u_i^{(1)} \quad u_i^{(2)} \rfloor -$ m-мерный вектор управляющих воздействий, $u_i^{(1)}, \; u_i^{(2)}$ (m-p) и p-мерные векторы соответственно, q постоянный вектор размерностью $m \times 1$. F_δ, G_1 известные матрицы соответствующих размерностей.

Требуется найти управляющее воздействие u_i и соответствующую траекторию x_i с граничными условиями (2), (3) такие, чтобы уравнение (1) удовлетворялось и следующий функционал получал минимальное значение

$$J = \frac{1}{2}(x_N - x_d)' \overline{N} (x_N - x_d) + (u_N - C)' \delta (u_N - C) +$$
$$\frac{1}{2} h \sum_{i=0}^{N-1} (x'_i Q x_i + 2x'_i K u_i + u'_i R u_i) + \frac{1}{2} h \sum_{i=N+1}^{N+\Delta-1} (x'_i \overline{Q} x_i + (u_i - C)' \gamma (u_i - C)), \qquad (4)$$

где $\overline{N} \geq 0,\ \delta = \delta' > 0,\ R = R' > 0,\ Q = Q' \geq 0,\ \overline{Q} = \overline{Q'} \geq 0,\ \gamma = \gamma' > 0,\ K,$ x_d, C — известные матрицы и векторы соответствующих размерностей, $C = \begin{bmatrix} C_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, C_1 — известный постоянный параметр, h — шаг дискретизации.

3. Уравнение Эйлера-Лагранжа для задачи (1)-(4) и построение решения на отрезке $0 \leq i \leq N + \Delta$.

Используя результаты [12,17,19], получаем дискретные уравнения Эйлера-Лагранжа на интервалах $0 \leq i \leq N-1,\ N+1 \leq i \leq N + \Delta - 1$ для задачи (1)-(4) в следующем виде, соответственно

$$x_{i+1} = \overline{\Psi} x_i - M\lambda_{i+1} + \overline{V}, \tag{5}$$

$$\lambda_i = \overline{R} x_i + \overline{\Psi}' \lambda_{i+1},\ 0 \leq i \leq N-1, \tag{6}$$

$$x_{i+1} = \Phi x_i - \overline{M} \lambda_{i+1} + \overline{V}_1, \tag{7}$$

$$\lambda_i = \overline{Q}' x_i + \Phi' \lambda_{i+1},\ N+1 \leq i \leq N + \Delta - 1, \tag{8}$$

с граничными условиями

$$\lambda_{N+1} = (F'_\delta)^{-1} h \lambda_N - (F'_\delta)^{-1} N'(x_N - x_d), \tag{9}$$

$$u_N = C - \delta^{-1} G'_1 \lambda_{N+1}, \tag{10}$$

$$\lambda_{N+\Delta} = 0, \tag{11}$$

$$H'\nu + \lambda_0 = 0, \tag{12}$$

где

$$\overline{\Psi} = \Phi - \Gamma R^{-1} K',\ M = \Gamma R^{-1} \Gamma',\ \overline{R} = Q' - K R^{-1} K',\ \overline{M} = -\Gamma \gamma^{-1} \Gamma',\ \overline{V}_1 = \Gamma C + \overline{V}.$$

Используя линейность системы уравнений (5), (6) и (7), (8), предположим, что λ_i является линейной функцией от x_i [12], т.е.

$$\begin{cases} S_i = \overline{\psi}' S_{i+1} (E + M S_{i+1})^{-1} \overline{\psi} + \overline{R}, \\ N_i = \overline{\psi}' (E + S_{i+1} M)^{-1} N_{i+1}, \qquad 0 \leq i \leq N-1, \\ \omega_i = \overline{\psi}' (E + S_{i+1} M)^{-1} (S_{i+1} \overline{V} + \omega_{i+1}), \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} S_i = \Phi' S_{i+1}(E + \overline{M}\, S_{i+1})^{-1}\Phi + \overline{Q}', \\ N_i = \Phi'(E + S_{i+1}M)^{-1} N_{i+1}, \qquad\qquad N+1 \le i \le N+\Delta-1, \\ \omega_i = \Phi'(E + S_{i+1}M)^{-1}(S_{i+1}\overline{V}_1 + \omega_{i+1}). \end{cases} \quad (15)$$

Из (11) получаем, что

$$S_{N+\Delta} = 0,\ N_{N+\Delta} = 0,\ \omega_{N+\Delta} = 0. \quad (16)$$

С другой стороны, используя результаты [21], можно показать, что

$$(N_0' + H)x_0 + n_0\nu = q - W_0, \quad (17)$$

где матрица n_i и вектор W_i определяются следующими дифференциальными уравнениями соответственно:

$$\begin{cases} n_i = n_{i+1} - N_{i+1}'(E + MS_{i+1})^{-1} MN_{i+1},\ \ n_N = 0, \\ W_i = W_{i+1} + N_{i+1}'(E + MS_{i+1})^{-1}(\overline{V} - M\omega_{i+1}),\ \ W_N = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений (15) с начальными условиями (16), затем, решая систему уравнений (14) с начальными условиями

$$\begin{aligned} S_N &= \Big((F_\delta')^{-1}h + S_{N+1}G_1\delta^{-1}G_1'(F_\delta')^{-1}h\Big)^{-1} \times \\ &\times \Big(S_{N+1}F_\delta + (F_\delta')^{-1}\overline{N}' + S_{N+1}G_1\delta^{-1}G_1'(F_\delta')^{-1}\overline{N}'\Big), \\ N_N &= \Big((F_\delta')^{-1}h + S_{N+1}G_1\delta^{-1}G_1'(F_\delta')^{-1}h\Big)^{-1} N_{N+1}, \\ \omega_N &= \Big((F_\delta')^{-1}h + S_{N+1}G_1\delta^{-1}G_1'(F_\delta')^{-1}h\Big)^{-1} \times \\ &\times \Big(S_{N+1}G_1C - S_{N+1}G_1\delta^{-1}G_1'(F_\delta')^{-1}\overline{N}'x_d + \omega_{N+1} - (F_\delta')^{-1}\overline{N}'x_d\Big), \end{aligned}$$

получим систему линейных алгебраических уравнений относительно x_0, ν

$$\begin{bmatrix} S_0 & N_0 + H' \\ N_0' + H & n_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ \nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\omega_0 \\ q - W_0 \end{bmatrix}. \quad (18)$$

Решая систему уравнений (18) относительно x_0, ν, определим программную траекторию x_i для $0 \le i \le N-1$следующим образом

$$x_{i+1} = (\overline{\Psi} - M(\overline{\Psi}')^{-1} S_i + M(\overline{\Psi}')^{-1} \overline{R}) x_i - M(\overline{\Psi}')^{-1} (N_i \nu + \omega_i) + \overline{V}. \quad (19)$$

Используя условие (3) в момент N с учетом (9), (10), (13)

$$x_{N+1} = (F_\delta - G_1 \delta^{-1} G_1' (F_\delta')^{-1} h S_N + G_1 \delta^{-1} G_1' (F_\delta')^{-1} \overline{N}') x_N - G_1 \delta^{-1} G_1' (F_\delta')^{-1} h N_N \nu -$$
$$- G_1 \delta^{-1} G_1' (F_\delta')^{-1} h \omega_N + G_1 C - G_1 \delta^{-1} G_1' (F_\delta')^{-1} \overline{N}') x_d,$$

мы определяем программную траекторию x_i для $N+1 \le i \le N+\Delta-1$ следующим образом

$$x_{i+1} = (\Phi - \overline{M}(\Phi')^{-1} S_i + \overline{M}(\Phi')^{-1} \overline{Q}') x_i - M(\Phi')^{-1} (N_i \nu + \omega_i) + \overline{V}_1, \quad (20)$$

вектор управляющих воздействий

$$u_i = -R^{-1}(K' - \Gamma'(\overline{\Psi}')^{-1} \overline{R} + \Gamma'(\overline{\Psi}')^{-1} S_i) x_i - R^{-1} \Gamma'(\overline{\Psi}')^{-1} (N_i \nu + \omega_i),$$
$$0 \le i \le N-1,$$
$$u_i = C - \gamma^{-1} \Gamma'(\Phi')^{-1} (S_i - \overline{Q}') x_i - \gamma^{-1} \Gamma'(\Phi')^{-1} (N_i \nu + \omega_i),$$
$$N+1 \le i \le N+\Delta-1.$$

4. Пример.

Рассмотрим пример, описывающий вертикальные движения летающего объекта по $0 \le i \le N+\Delta.$ Для простоты будем считать, что объект движется только вертикально и не совершает никакого вращения относительно вертикальной оси. В этом случае из (1) и (2)

$$x_i = \begin{bmatrix} z_i^{(1)} \\ z_i^{(2)} \end{bmatrix}, \ \Phi = \begin{bmatrix} 1 & 10^{-3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \ \Gamma = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \overline{V} = \begin{bmatrix} 0 \\ -10^{-3} g \end{bmatrix},$$

$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \ q = z_{10} = 0, \ N = 5, \ \Delta = 10, g$ гравитационное ускорение.

Теперь введем следующий функционал, который необходимо минимизировать

$$J = \frac{1}{2}(x_N - x_d)' \overline{N}(x_N - x_d) + (u_N^{(1)} - C_1)^2 \delta +$$
$$+ \frac{1}{2} h \sum_{i=0}^{N-1} (x_i' Q x_i + 2 x_i' K u_i^{(1)} + R(u_i^{(1)})^2) + \frac{1}{2} h \sum_{i=N+1}^{N+\Delta-1} (x_i' \overline{Q} x_i + (u_i^{(1)} - C_1)^2 \gamma,$$

где

$$N = \begin{bmatrix} \chi & 0 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}, \ x_d = \begin{bmatrix} z_d \\ 0 \end{bmatrix}, \ Q = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix}, \ K = \begin{bmatrix} k_1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \overline{Q} = \begin{bmatrix} \overline{q}_1 & 0 \\ 0 & \overline{q}_2 \end{bmatrix},$$

$\chi,\ \alpha, z_d, \delta, C_1,\ R,\ q_1, q_2, k_1, \bar{q}_1, \bar{q}_2,\ \gamma$ заданные числа.
С помощью процедуры, описанной в разделах 2-3, требуемая задача решена.

Приведем графики оптимальных программных траекторий $z_i^{(1)}$ и воздействий управления $u_i^{(1)}$ на интервале $0 \le i \le N + \Delta$:

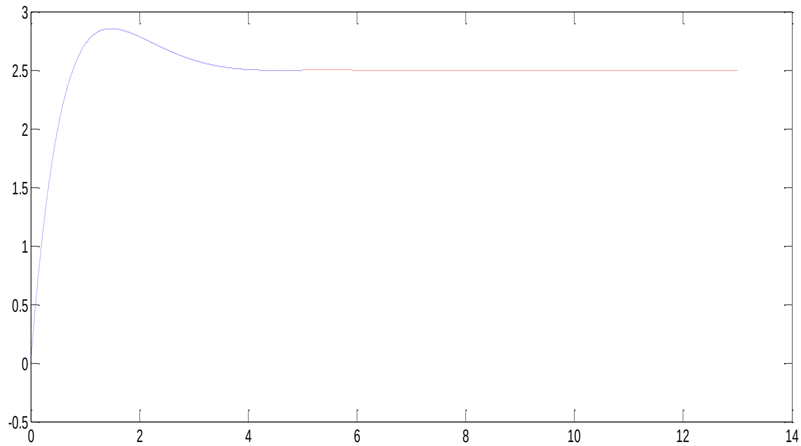

Рис.1. Изменения $z_i^{(1)}$ на интервале [0, N+Δ].

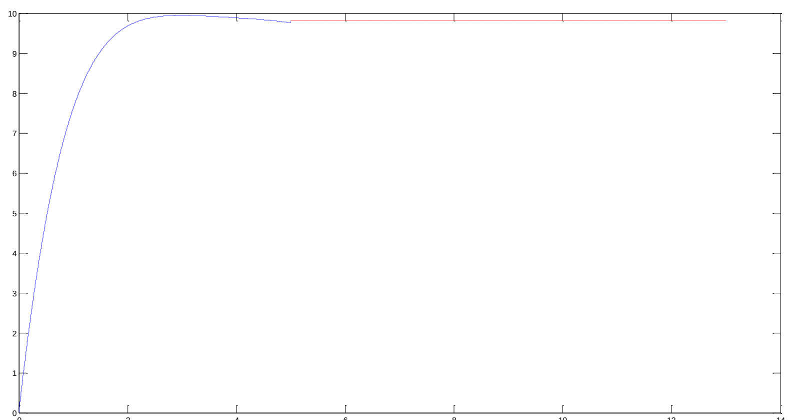

Рис.2. Изменения $u_i^{(1)}$ на интервале [0, N+Δ].

5. Заключение.

В данной работе рассматривается линейная дискретно-квадратичная задача оптимизации, где на известной части интервала времени известны некоторые координаты управляющего воздействия. С помощью метода прогонки [2,3] задача сводится к конечно-разностным уравнениям. Решая эти уравнения, для каждой части интервала времени строят управляющие воздействия и соответствующую траекторию.

Автор благодарен академику Фикрету Алиеву за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. Aliev F.A. Optimization of Discrete Systems, Dokl. AN of Az. SSR, V. 36, N.1, (1980).
2. Aliev F.A. Optimal control problem for a linear system with nonseparated two-point boundary conditions. zv. Akad. Nauk Az SSR, Ser. Fiz. Tekh. Mat. Nauk, N.2, (1986), pp.345-347.
3. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, (2022), 410p.
4. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Maharramov I.A., Huseynova N.S., Amirova L.I. About One Sweep Algorithm for Solving Linear-Quadratic Optimization Problem with Unseparated Two-Point Boundary Conditions, Sahand Communications in Mathematical Analysis Search, V.17, N.1, 2020, pp.99-107.
5. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Tunik A.A., Velieva N.I., Rasulova U.Z., Mirsaabov S.M. Constructing an optimal controller for maneuver of quadrotor in 3-D space, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.13, N.2, (2022), pp.211-221.
6. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Huseynova N.Sh. Mathematical modeling and control of quadcopter motion, Proceedings of the 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.1, (2022), pp.81-83.
7. Aliev F.A. Optimal control problem for a linear system with nonseparated two-point boundary conditions, Izv. Akad. Nauk Az SSR, Ser. Fiz. Tekh. Mat. Nauk, (1986), pp.345-347.
8. Larin V.B., Tunik A.A., Ilnytska S.I. Some Algorithms for Unmanned Aerial Vehicles Navigation, Outskirts, (2020), 204 p.

9. Maksudov F.G., Aliev F.A. Optimization of impulse systems with nonseparated boundary conditions, Doklady Akademii Nauk, V.280, N.4, (1985), pp.796-798.
10. Mirsaabov S.M., Aliev F.A., Larin V.B., Tunik A.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I. Problems of modeling in problems of development of algorithms for controlling spatial motion of quadrocopter, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.10, N.2, (2021), pp.96-112.
11. Алиев Ф.А. Задача оптимизации с двухточечными краевыми условиями Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, N.6, (1985), pp.138-146.
12. Алиев Ф.А. Методы Решения Прикладных Задач Оптимизации Динамических Систем, Баку, Элм, (1989), 320 с.
13. Алиев Ф.А., Гусейнова Н.Ш., Магеррамов И.А., Муталлимов М.М. Новый алгоритм прогонки для решения непрерывной линейно квадратичной задачи оптимального управления с неразделенными краевыми условиями, Известия Российской академии наук. Теория и системы управления, (2021), с.52-59,
14. Алиев Ф.А., Муталлимов М.М., Магеррамов И.А., Ханбабаева М.Г. Новый алгоритм прогонки решения линейной квадратичной задачи оптимизации с неразделенными двухточечными краевыми условиями, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.7, N.2, (2018), pp.142-152.
15. Бордюг Б.А. Управление Движением Статистически Неустойчивых Шагающих Аппаратов, Баку, Элм, (2012), 223с.
16. Бордюг Б.А., Ларин В.Б., Тимошенко А.Г. Задачи Управления Шагающими Аппаратами, Наукова думка, (1985).
17. Брайсон А., Хо Ю-Ши, Прикладная Теория Оптимального Управления, М.: Мир, (1972), 544 с.
18. Гаджиева Н.С., Муталлимов М.М. Построение оптимальных программных траекторий и управлений при вертикальном движении квадрокоптера, Proceedings of IAM, V.12, N.2, (2023), pp.166-180.
19. Квакернаак Х., Сиван Р. Линейные Оптимальные Системы управления, М.: Мир, (1977), 656 с.
20. Ларин В.Б. Управление Шагающими Аппаратами, Наукова думка, (1980).
21. Полак Э. Численные Методы Оптимизации. Единый Подход, Москва, Мир, (1971), 424 с.
22. Понтрягин Л.С. Обыкновенные Дифференциальные Уравнения, Наука, Москва, (1974), 331 с.
23. Черноусько Ф.Л. Колмановский В.Б. Оптимальное Управление при Случайных Возмущениях, М.: Наука, (1978), 351 с.

COMPUTATIONAL ALGORITHM FOR SOLUTION DISCRETE LINEAR QUADRATIC OPTIMIZATION PROBLEM WITH CONSTRAINT IN THE FORM OF EQUALITIES ON CONTROL BY SWEEP METHOD

N.S. Hajiyeva

Institute of Applied Mathematics of Baku State University, Baku, Azerbaijan
e-mail: nazile.m@mail.ru

Abstract. In the paper the discrete linear quadratic optimization problem with boundary condition is considered. The quadratic functional and extended functional are constructed and the discrete Euler-Lagrange equations are obtained. Using sweep method the obtained discrete Euler-Lagrange equations with boundary conditions are solved and the optimal program trajectory and control actions on each part of the time interval have been constructed. The results are illustrated using the example of vertical movement and hovering of a flying object at a certain height under the influence of a vertical external force.

Keywords: linear discrete quadratic optimization problem, discrete Euler-Lagrange equation, sweep method, finite difference equations, control action, optimal program trajectory, flying object.

References

1. Aliev F.A. Optimization of Discrete Systems, Dokl. AN of Az. SSR, V.36, N.1, (1980).
2. Aliev F.A. Optimal control problem for a linear system with nonseparated two-point boundary conditions, Izv. Akad. Nauk Az SSR, Ser. Fiz. Tekh. Mat. Nauk, N.2, (1986), pp.345-347.
3. Aliev F.A., Larin V.B., Velieva N.I. Algorithms of the Synthesis of Optimal Regulators, USA, Outskirts Press, (2022), 410p.
4. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Maharramov I.A., Huseynova N.S., Amirova L.I. About One Sweep Algorithm for Solving Linear-Quadratic Optimization Problem with Unseparated Two-Point Boundary Conditions, Sahand Communications in Mathematical Analysis Search, V.17, N.1, (2020), pp.99-107.
5. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Tunik A.A., Velieva N.I., Rasulova U.Z., Mirsaabov S.M. Constructing an optimal controller for maneuver of quadrotor in 3-D space, TWMS Journal of Pure and Applied Mathematics, V.13, N.2, 2022, pp.211-221.

6. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I., Huseynova N.Sh. Mathematical modeling and control of quadcopter motion, Proceedings of the 8th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications, V.1, (2022), pp.81-83.
7. Aliev F.A., Optimal control problem for a linear system with nonseparated two-point boundary conditions, Izv. Akad. Nauk Az SSR, Ser. Fiz. Tekh. Mat. Nauk, (1986), pp.345-347.
8. Larin V.B., Tunik A.A., Ilnytska S.I. Some Algorithms for Unmanned Aerial Vehicles Navigation, Outskirts, (2020), 204 p.
9. Maksudov F.G., Aliev F.A. Optimization of impulse systems with nonseparated boundary conditions, Doklady Akademii Nauk, V.280, N.4, (1985), pp.796-798.
10. Mirsaabov S.M., Aliev F.A., Larin V.B., Tunik A.A., Mutallimov M.M., Velieva N.I. Problems of modeling in problems of development of algorithms for controlling spatial motion of quadrocopter, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.10, N.2, (2021), pp.96-112.
11. Aliev F.A. Zadacha optimizatsii s dvukhtochechnymi kraevymi usloviyami Izv. AN SSSR. Tekhn. kibernetika, N.6, (1985), s.138-146.(Aliev F.A. Optimization problem with two-point boundary conditions Izv. Academy of Sciences of the USSR. Tech. Cybernetics, N.6, (1985), pp.138-146.).
12. Aliev F.A. Metody Resheniya Prikladnykh Zadach Optimizatsii Dinamicheskikh Sistem, Baku, Elm, (1989), 320 s. (Aliev F.A. Methods for Solving Applied Problems of Optimization of Dynamic Systems, Baku, Elm, (1989), 320 p.)
13. Aliev F.A., Guseynova N.Sh., Magerramov I.A., Mutallimov M.M. Novyy algoritm progonki dlya resheniya nepreryvnoy lineyno kvadratichnoy zadachi optimal'nogo upravleniya s nerazdelennymi kraevymi usloviyami, Izvestiya Rossiyskoy akademii nauk. Teoriya i sistemy upravleniya, (2021), s.52-59 (Aliev F.A., Guseinova N.Sh., Magerramov I.A., Mutallimov M.M. A new sweep algorithm for solving a continuous linear quadratic optimal control problem with nonseparated boundary conditions, Izvestia of the Russian Academy of Sciences. Theory and control systems, (2021), pp.52-59)
14. Aliev F.A., Mutallimov M.M., Magerramov I.A., Khanbabaeva M.G. Novyy algoritm progonki resheniya lineynoy kvadratichnoy zadachi optimizatsii s nerazdelennymi dvukhtochechnymi kraevymi usloviyami, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.7, N.2, (2018), s.142-152 (Aliev F.A., Mutallimov M.M., Magerramov I.A., Khanbabaeva M.G. A new algorithm for running a solution to a linear quadratic optimization problem with non-separated two-point boundary conditions, Proceedings of the Institute of Applied Mathematics, V.7, N.2, (2018), pp.142-152)

15. Bordyug B.A. Upravlenie Dvizheniem Statisticheski Neustoychivykh Shagayushchikh Apparatov, Baku, Elm, (2012), 223s. (Bordyug B.A. Motion control of statistically unstable walking vehicles, Baku, Elm, (2012), 223p.).
16. Bordyug B.A., Larin V.B., Timoshenko A.G. Zadachi Upravleniya Shagayushchimi Apparatami, Naukova dumka, (1985) (Bordyug B.A., Larin V.B., Timoshenko A.G. Control Problems for Walking Vehicles, Naukova Dumka, (1985))
17. Brayson A., Kho Yu-Shi, Prikladnaya Teoriya Optimal'nogo Upravleniya, M.: Mir, (1972), 544 s. (Bryson A., Ho Yu-Shi, Applied Theory of Optimal Control, M.: Mir, (1972), 544 p.).
18. Gadzhieva N.S., Mutallimov M.M. Postroenie optimal'nykh programmnykh traektoriy i upravleniy pri vertikal'nom dvizhenii kvadrokoptera,/ Proceedings of IAM, V.12, N.2, (2023), s.166-180 (Hajiyeva N.S., Mutallimov M.M. Construction of optimal program trajectories and controls for vertical movement of a quadcopter, Proceedings of IAM, V.12, N.2, (2023), pp.166-180).
19. Kvakernaak Kh., Sivan R. Lineynye Optimal'nye Sistemy Upravleniya, M.: Mir, (1977), 656 s. (Kvakernaak H., Sivan R. Linear Optimal Control Systems, M.: Mir, (1977), 656 p.).
20. Larin V.B. Upravlenie Shagayushchimi Apparatami, Naukova dumka, (1980) (Larin V.B. Control of walking vehicles Naukova Dumka, (1980))
21. Polak E. Chislennye Metody Optimizatsii. Edinyy Podkhod, Moskva, Mir, (1971), 424 s. (Polak E. Numerical Optimization Methods. Unified Approach, Moscow, Mir, (1971), 424 pp.)
22. Pontryagin L.S. Obyknovennye Differentsial'nye Uravneniya, Nauka, Moskva, (1974), 331 s. (Pontryagin L.S. Ordinary Differential Equations, Nauka, Moscow, (1974), 331 p.)
23. Chernous'ko F.L., Kolmanovskiy V.B. Optimal'noe Upravlenie pri Sluchaynykh Vozmushcheniyakh, M.: Nauka, (1978), 351 s.(Chernousko F.L., Kolmanovsky V.B. Optimal Control under Random Disturbances, M.: Nauka, (1978), 351 p.)